

Лекция 5

ХАОС В РЕАЛИСТИЧНЫХ МОДЕЛЯХ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЕКУРРЕНТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Помимо искусственных моделей, сконструированных для иллюстрации тех или иных свойств сложной динамики, в нашем курсе обсуждалась пока только одна физически мотивированная система — модель Лоренца. В этой лекции будут рассмотрены дальнейшие примеры реалистичных моделей физических систем.

Начиная с Ньютона, традиционный для физики способ описания динамических систем состоит в использовании дифференциальных уравнений. Однако во многих случаях оказывается столь же естественным и удобным работать с отображениями — разностными уравнениями, определяющими динамику в дискретном времени. В нашем изложении будут присутствовать и тот, и другой подходы. За отдельными исключениями, определяющим моментом при выборе материала в этой лекции будет наличие физической мотивации для введения в рассмотрение той или иной системы.

В уравнениях динамических систем обычно присутствуют параметры — величины, которые считаются постоянными во времени, но от задания которых может зависеть характер реализующегося в системе режима. Представьте себе, что система заключена в ящик, на котором имеется несколько ручек настройки. Устанавливая ручки в различные положения, наблюдаем на выходе системы разную по характеру зависимость динамической переменной от времени — периодическую, квазипериодическую, хаотическую. Когда управляющих параметров два, очень ценное наглядное представление о поведении системы дает *карта динамических режимов* — диаграмма на плоскости, где по осям координат отложены два параметра, а области различных режимов динамики показаны определенным цветом (штриховкой, серыми тонами) либо обозначены границы этих областей.

Простейший по своей идее способ построения карты динамических режимов на компьютере подразумевает, что в каждой точке плоскости параметров, соответствующей элементу графического изображения (пикселью), решается численно дифференциальное уравнение или итерируется отображение, задающее динамическую

систему, и производится анализ характера режима, возникающего после завершения переходного процесса. Для диагностики режимов может привлекаться вычисление старшего ляпуновского показателя (см. лекции 10, 11): положительная величина ляпуновского показателя свидетельствует о присутствии хаоса.

Из-за того что нелинейным системам часто присуща мультистабильность, карту динамических режимов, вообще говоря, надо представлять не как один лист, а как совокупность листов, перекрывающихся в тех областях параметров, где система имеет более одного аттрактора. На практике при построении карты динамических режимов начальные условия в каждой очередной точке пространства параметров либо задаются фиксированными, либо наследуют состояние, реализованное в предыдущей точке. При этом в областях мультистабильности карта оказывается неполной, ибо на ней не представлены те режимы, для которых начальные условия не попали в бассейн притяжения аттрактора. Чтобы изучить все листы карты, требуется, вообще говоря, кропотливая работа, с испытанием различных начальных условий в каждой точке пространства параметров. Заметим, что при использовании процедуры наследования вид карты может зависеть от направления сканирования плоскости параметров.

Несмотря на эти оговорки и осложнения, карта динамических режимов, даже неполная, оказывается чрезвычайно полезным рабочим инструментом и в теоретических, и в экспериментальных исследованиях. Для большинства систем, обсуждаемых в этой лекции, будут приведены соответствующие карты.

5.1. Модели с дискретным временем

Отображение Эндо. Рассмотрим следующую простую физическую систему (рис. 5.1). Пусть вдоль оси x может двигаться частица массы m , причем ее движению препятствует сила трения,

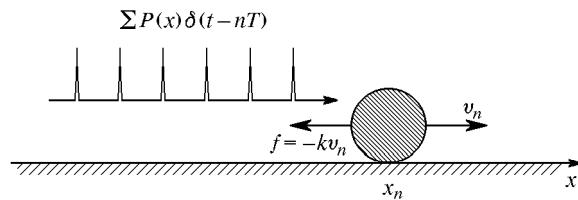


Рис. 5.1. Механическая система, динамика которой описывается отображением Эндо

пропорциональная скорости, $f = -kv$. Пусть далее на частицу действуют с периодом T импульсные толчки, интенсивность которых зависит от координаты частицы в момент толчка, т. е. передаваемый импульс дается функцией $P(x)$.

Если перед n -м толчком координата частицы была x_n , а скорость v_n , то сразу после толчка скорость составит $v_n + P(x_n)/m$ и далее будет уменьшаться по экспоненциальному закону, $v(t) = [v_n + P(x_n)/m] \exp(-kt/m)$. К моменту следующего толчка будем иметь

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \left(v_n + \frac{P(x_n)}{m} \right) \exp\left(-\frac{kT}{m}\right), \\ x_{n+1} &= x_n + \int_0^T v(t) dt = \\ &= x_n + (mv_n + P(x_n)) \left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) \right) k^{-1}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Введем вместо v новую переменную

$$y = x - mk^{-1} \left(\exp\left(\frac{kT}{m}\right) - 1 \right) v.$$

Тогда из (5.1) получаем

$$x_{n+1} = f(x_n) - by_n, \quad y_{n+1} = x_n, \quad (5.2)$$

где

$$b = \exp\left(-\frac{kT}{m}\right) \quad \text{и} \quad f(x) = x(1+b) + P(x)(1-b)k^{-1}. \quad (5.3)$$

Предположим, что пространственное распределение воздействующей на частицу импульсной силы таково, что $f(x) = 1 - ax^2$. Тогда отображение (5.2) записывается в виде

$$x_{n+1} = 1 - ax^2 - by_n, \quad y_{n+1} = x_n. \quad (5.4)$$

Его называют *отображением Эно* (Hénon map). Мишель Эно, французский астрофизик, предложил это отображение в 1976 г. как абстрактный пример динамической системы, обладающей странным аттрактором. Сейчас очевидно, что отображение Эно может служить для описания динамики ряда простых физических систем, одну из которых мы рассмотрели. К другим относятся диссипативный осциллятор и ротор под импульсным периодическим воздействием (Heagy, 1992). Отметим, что, с физической точки зрения, реалистичными являются положительные значения параметра b .

Вычислим якобиан отображения Эно:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2a & -b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = b. \quad (5.5)$$

Если мы рассмотрим облако изображающих точек, занимающее площадь S , то на каждом последующем шаге итераций эта

площадь будет умножаться на фактор $|b|$, так что при $|b| < 1$ отображение Эно представляет собой диссипативную систему. Заметим, что при $b \rightarrow 0$ оно сводится к логистическому отображению (2.3), а при $b \rightarrow 1$ — это отображение, сохраняющее площадь, т. е. консервативная система.

На рис. 5.2 показано, как выглядит странный аттрактор при значениях параметров $a = 1,4$, $b = -0,3$, выбранных в исходной работе Эно.

На рис. 5.3 приведена карта динамических режимов отображения Эно на плоскости параметров (a, b) . Нижняя часть диаграммы отвечает установлению стационарного состояния равновесия. С ростом параметра a реализуются режимы периодических

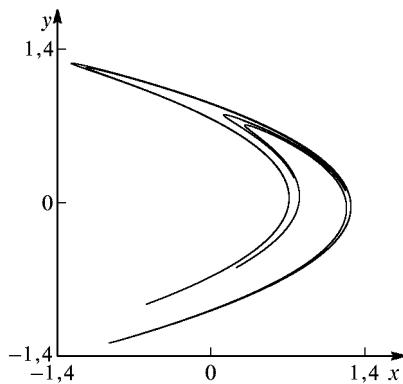


Рис. 5.2. Странный аттрактор отображения Эно (5.4) при $a = 1,4$, $b = -0,3$

желобов, сначала периода 2, затем 4, 8, — наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода. Бифуркационные

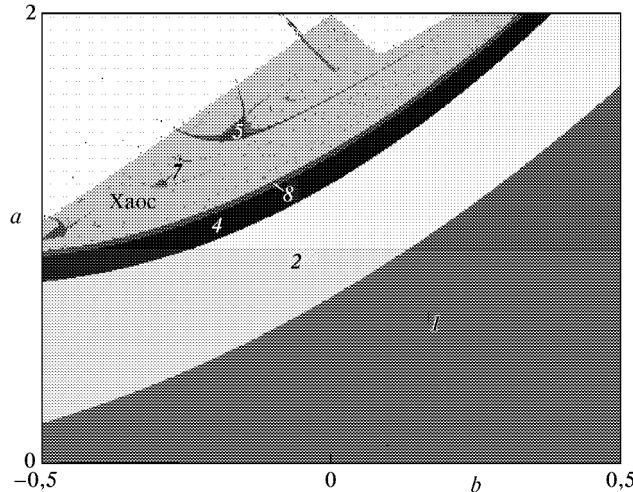


Рис. 5.3. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Эно (5.4). Белая область в верхней части диаграммы отвечает расходимости итераций отображения

колебаний, сначала периода 2, затем 4, 8, — наблюдается последовательность бифуркаций удвоения периода. Бифуркационные

линии на плоскости параметров представляются границами соответствующих областей. Они накапливаются к пределу — критической линии, являющейся границей хаоса.

Отображение Икеды — модель возбуждаемого лазером кольцевого резонатора с нелинейной средой. В 1980 г. японские исследователи Икеда, Даидо и Акимото предложили механизм возникновения сложной динамики в нелинейной оптической системе — кольцевом резонаторе, содержащем среду с фазовой нелинейностью (Ikeda, Daido, Akimoto, 1980). Резонатор возбуждается лучом лазера через полупрозрачное зеркало (рис. 5.4). Нетривиальные

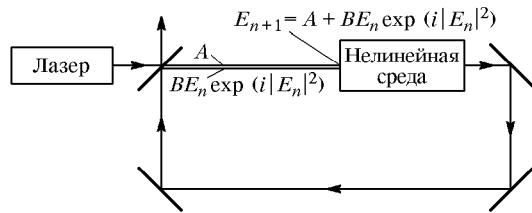


Рис. 5.4. Кольцевой резонатор, возбуждаемый внешним источником когерентного излучения, — физическая система, для описания которой предложено отображение Икеды (5.6)

колебательные режимы могут реализоваться благодаря интерференции монохроматического сигнала на входе и модулированного по фазе сигнала, прошедшего через нелинейную среду.

Если пренебречь временем релаксации отклика среды на изменение интенсивности света, то значения комплексной амплитуды поля E на входе в нелинейную среду при n -м и $(n + 1)$ -м проходе по кольцевому резонатору связаны следующим соотношением:

$$E_{n+1} = A + BE_n \exp(i|E_n|^2 + i\varphi). \quad (5.6)$$

Здесь A — параметр интенсивности света от лазера, B — параметр диссипации поля в резонаторе. Величина, фигурирующая в показателе экспоненты, соответствует набегу фазы при обходе резонатора: параметр φ характеризует отстройку частоты излучения лазера от собственной моды резонатора, а добавка $|E|^2$ обусловлена нелинейным сдвигом фазы из-за зависимости показателя преломления от амплитуды поля.

Вычисление якобиана отображения Икеды приводит к результату $J = B^2$, так что при $B < 1$ эта система диссипативная. На рис. 5.5 показаны портреты хаотических атTRACTоров, реализующихся в отображении Икеды при различных значениях параметра A .

На рис. 5.6 представлена карта динамических режимов отображения Икеды на плоскости параметров (A, B) . Если увеличивать

параметр интенсивности излучения A при фиксированном уровне параметра потерь в резонаторе B , то переход к хаосу происходит, как правило, через каскад бифуркаций удвоения периода. Од-

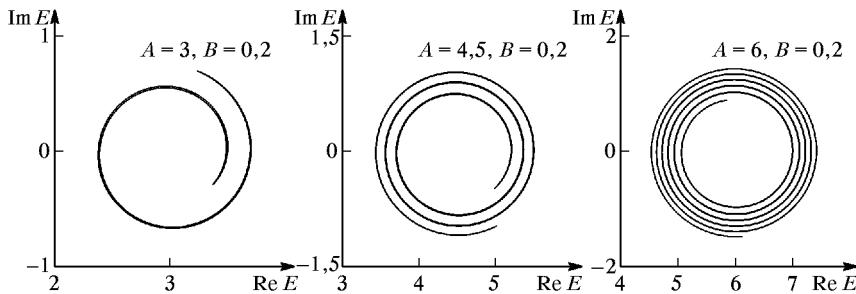


Рис. 5.5. Странный хаотический аттрактор в отображении Икеды (5.6) при $B = 0,2$, $\varphi = 0$, нескольких различных значениях параметра интенсивности падающего излучения

нако глобальная структура границы хаоса, как видно из рисунка, устроена сложным и нетривиальным образом. В частности, имеются узкие полосы регулярной динамики, простирающиеся далеко в область, занятую хаосом.

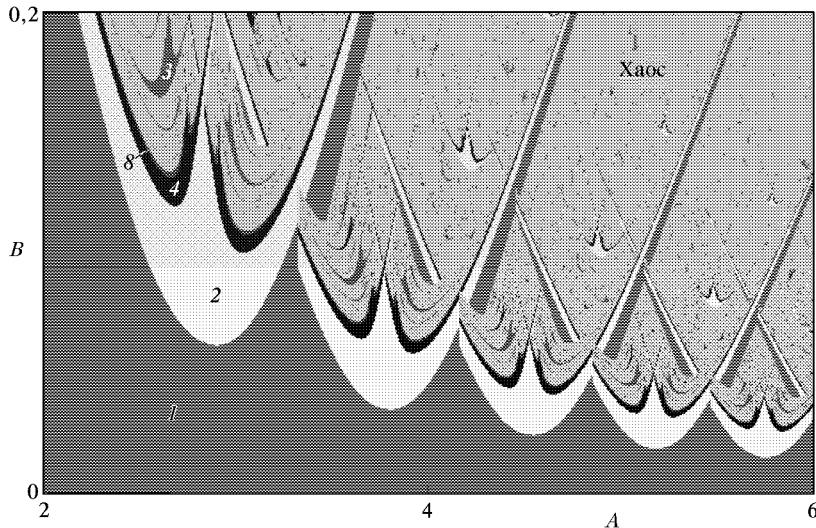


Рис. 5.6. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Икеды (5.6) при $\varphi = 0$

Основным «строительным блоком» картины служит характерная конфигурация областей, показанная отдельно на рис. 5.7.

Французский исследователь Кристиан Мира назвал ее *crossroad area* — область «перекрестка». В этой области располагается точка сборки, к которой подходят, образуя характерное острое, две линии складок. Складка здесь представляет собой геометри-

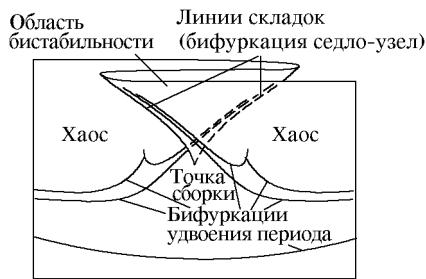


Рис. 5.7. Схематическое изображение части плоскости параметров нелинейной системы, отвечающей области crossroad — «перекресток»

ческое место точек бифуркации, отвечающих слиянию устойчивой и неустойчивой неподвижной точки или устойчивой и неустойчивой периодической орбиты одинакового периода. Эту бифуркацию называют *седло-узловой* или *касательной бифуркацией* (второй термин предпочтителен, когда говорят об одномерных отображениях, а первый — о системах с большей размерностью фазового пространства). Линии складок можно рассматривать как края соответствующих листов карты. При обходе вокруг точки сборки система совершает перескок с одного листа на другой, когда мы пересекаем определенную линию складки. В зависимости от направления обхода, скачок происходит на разных линиях, так что имеет место гистерезис (рис. 5.8). Между линиями складок находится область бистабильности, где при одних и тех же параметрах

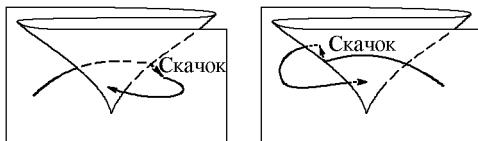


Рис. 5.8. Иллюстрация гистерезиса, наблюдаемого в окрестности точки сборки в системе в зависимости от начальных условий может реализоваться один из двух аттракторов. С каждым из них ассоциируется определенный лист карты динамических режимов, на котором имеется своя конфигурация областей, отвечающих метаморфизму этого аттрактора. В частности, на каждом листе представлены линии бифуркаций удвоения периода, области хаоса, а также вторичные сборки и вторичные «перекрестки», организованные около этих сборок.

Отображение Заславского. Рассмотрим какую-либо систему, в которой могут реализоваться периодические автоколебания, т. е. в фазовом пространстве имеет место предельный цикл. Пусть на эту систему действуют периодические импульсные толчки (рис. 5.9). Когда очередной толчок выводит систему из установившегося ре-

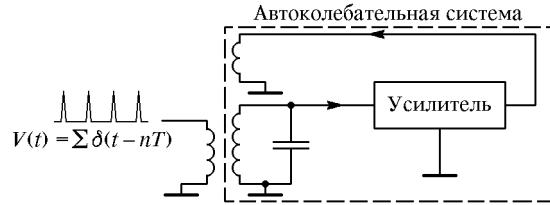


Рис. 5.9. К выводу диссипативного отображения Заславского

жима, амплитуда колебаний постепенно возвращается к предельному циклу. Если частота колебаний зависит от амплитуды, то этот процесс релаксации сопровождается накоплением добавки к фазе. Реалистичные уравнения, описывающие динамику системы в промежутке времени между толчками, записываются в виде

$$\dot{r} = -\gamma r, \quad \dot{\varphi} = \omega + \nu r, \quad (5.7)$$

где r — отклонение амплитуды от предельного цикла, γ — коэффициент затухания возмущения амплитуды, характеризующий скорость релаксации к предельному циклу, φ — фаза, ω — частота колебаний на предельном цикле, поправка к которой учитывается в первом порядке по r .

Пусть перед очередным n -м толчком отклонение по амплитуде от предельного цикла было r_n , а фаза равнялась φ_n . В результате толчка возникнет добавка к амплитуде, которая обязана быть периодической функцией фазы в момент толчка, φ_n . Простейшее предположение состоит в том, что это просто синус, так что сразу после толчка имеем

$$r_n(+0) = r_n + A \sin \varphi_n, \quad (5.8)$$

где A — параметр, характеризующий интенсивность толчков. Интегрируя уравнения (5.7) с начальными условиями $r_n(+0)$, φ_n на интервале времени T (период следования толчков), имеем

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (r_n + A \sin \varphi_n) \exp(-\gamma T), \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \omega T + \nu \int_0^T (r_n + A \sin \varphi_n) \exp(-\gamma t) dt = \\ &= \varphi_n + \omega T + \nu(r_n A \sin \varphi_n) \frac{1 - \exp(-\gamma T)}{\gamma}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\exp(\gamma T) - 1}{\gamma} \nu r, \quad \Delta = \omega T, \\ k &= A \frac{1 - \exp(-\gamma T)}{\gamma}, \quad d = \exp(-\gamma T),\end{aligned}\tag{5.10}$$

приходим к двумерному отображению, описывающему изменение пары переменных (φ_n, ρ_n) за период между двумя последовательными толчками:

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + \Delta + k \sin \varphi_n + d \rho_n, \\ \rho_{n+1} &= d \rho_n + k \sin \varphi_n.\end{aligned}\tag{5.11}$$

При записи первого уравнения мы учли, что переменная φ представляет собой фазу, и ее значения, отличные на $2\pi m$, следует считать эквивалентными.

Якобиан отображения (5.11) равен d . Как видно из (5.10), в контексте рассматриваемой задачи этот параметр меньше единицы, т. е. отображение диссипативное. Его называют *диссипативным отображением Заславского*. Консервативное отображение Заславского получается при подстановке $d = 1$.

На рис. 5.10 приведено несколько примеров портретов атракторов отображения Заславского, отвечающих периодическим, квазипериодическим и хаотическим режимам.

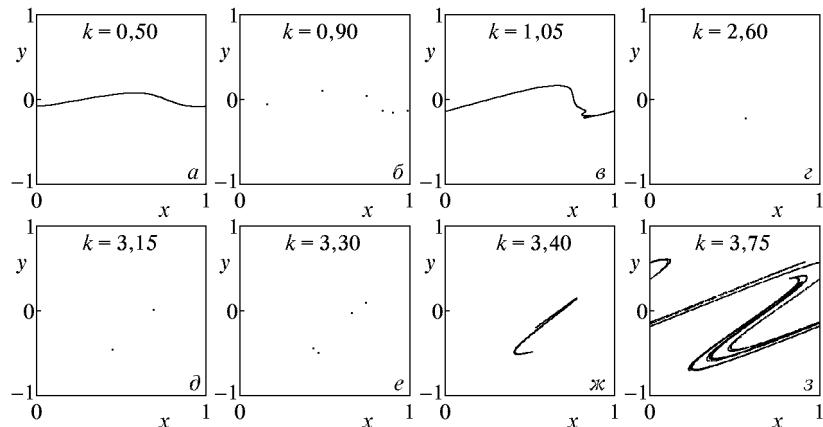


Рис. 5.10. Портреты атракторов диссипативного отображения Заславского при $d = 0,3$ и $\Delta/2\pi = 0,22$ на плоскости параметров $(x = \varphi/2\pi, y = \rho/2\pi)$: a, e — квазипериодические; b, z, ∂, e — периодические; $ж, з$ — хаотические

На рис. 5.11 показана карта динамических режимов отображения Заславского на плоскости параметров (Δ, k) . Периодическое поведение реализуется в областях, имеющих вид характерных языков (языки Арнольда). Периодические режимы внутри

языков Арнольда интерпретируются как *синхронизация* автоколебательной системы периодическим воздействием. Наличие большого числа языков говорит о том, что синхронизация может реализоваться на различных гармониках и субгармониках внешней

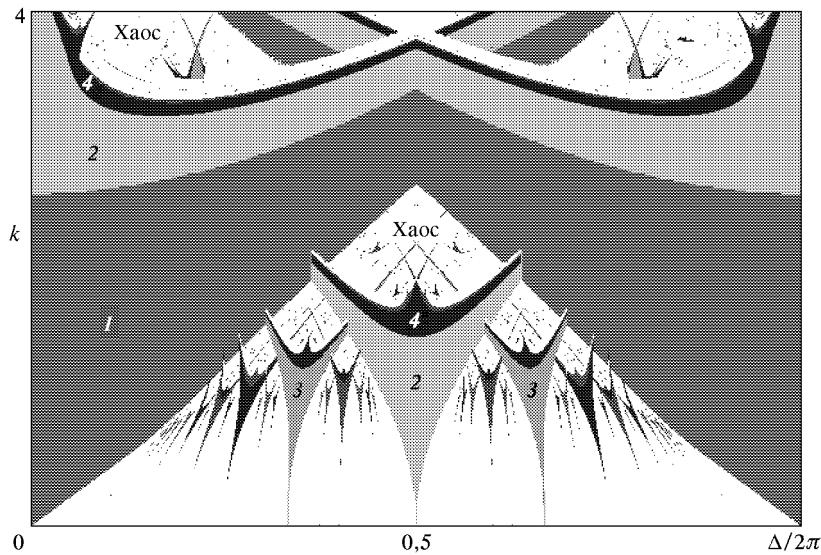


Рис. 5.11. Карта динамических режимов на плоскости параметров отображения Заславского (5.11) при $d = 0,3$. Цифрами указаны значения периода внутри некоторых языков Арнольда. Белым цветом обозначены квазипериодические (в нижней части рисунка) и хаотические (в верхней части) режимы

силы. На самом деле на рисунке видны только самые широкие языки, полное же число языков бесконечно — из каждой рациональной точки r на оси $k = 0$ исходит острием свой язык. Пока параметр k невелик, между языками остается все же место для квазипериодических режимов. В области больших значений параметра k внутри языков Арнольда можно видеть сложную картину, включающую «перекрестки», точки сборки, линии складок и удвоений периода, подобную той, которую мы обсуждали для отображения Икеды. При движении внутри языка Арнольда в общем направлении увеличения k можно наблюдать возникновение хаоса через каскад удвоений периода.

5.2. Искусственно сконструированные дифференциальные уравнения

Система Ресслера. Отто Ресслер, немецкий исследователь, не практикующий медик, интересовался динамическими системами в приложении к химии и биологии. Задавшись целью сконструи-

ровать по возможности простую модель с хаотическим поведением, он предложил в 1976 г. автономную систему дифференциальных уравнений (Rössler, 1976), которая служит с тех пор одним из классических объектов нелинейной динамики. Система имеет вид

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + ay, \quad \dot{z} = b + (x - r)z, \quad (5.12)$$

где x, y, z — динамические переменные, a, b, r — параметры.

На рис. 5.12 показан странный аттрактор системы Ресслера при $a = b = 0,2$, $r = 5,7$. Его называют *ленточным аттрактором Ресслера* (Rössler band) и он встроен существенно

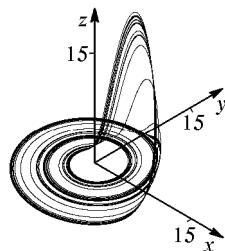


Рис. 5.12. Аттрактор Ресслера при $a = 0,2$,

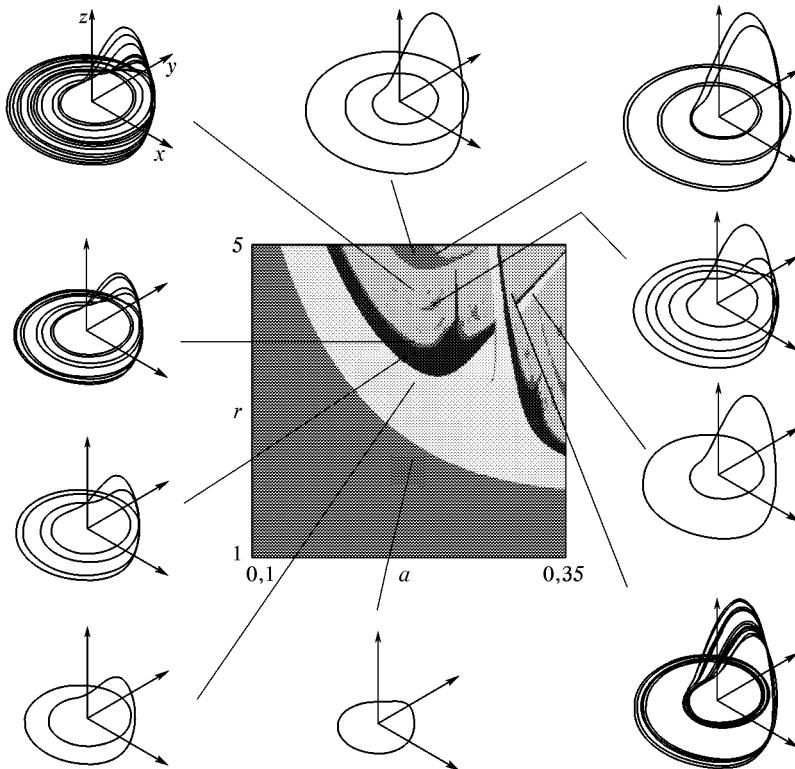


Рис. 5.13. Карта динамических режимов системы Ресслера на плоскости параметров a, r при $b = 0,2$ с показанными по периферии рисунками фазовыми портретами аттракторов в различных областях

На рис. 5.13 в центре приведена карта динамических режимов на плоскости параметров (a, r) при фиксированном $b = 0,2$. По периферии рисунка показаны фазовые портреты аттрактора, отвечающие некоторым характерным точкам пространства параметров. Замечательно, что для этой автономной системы дифференциальных уравнений основные элементы на карте динамических режимов те же самые, какие были отмечены для отображений. Это области периодичности, разграниченные линиями бифуркаций удвоения периода, «перекрестки» с характерным расположением линий складок и точек сборки, сложная структура границы хаоса с присутствием узких областей регулярной динамики, простирающихся вдоль линий складок далеко в область хаоса.

Системы Спротта. После Ресслера идея конструирования простых эталонных систем с хаотической динамикой была основа-

Модель	Уравнения	Показатели Ляпунова
A	$\dot{x} = y, \dot{y} = -x + yz, \dot{z} = 1 - y^2$	0,014, 0, -0,014
B	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 1 - xy$	0, 210, 0, -1,210
C	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 1 - x^2$	0,163, 0, -1,163
D	$\dot{x} = -y, \dot{y} = x + z, \dot{z} = xz + 3y^2$	0,103, 0, -1,320
E	$\dot{x} = yz, \dot{y} = x^2 - y, \dot{z} = 1 - 4x$	0,078, 0, -1,078
F	$\dot{x} = y + z, \dot{y} = -x + y/2, \dot{z} = x^2 - z$	0,117, 0, -0,617
G	$\dot{x} = 2x/5 + z, \dot{y} = xz - y, \dot{z} = -x + y$	0,034, 0, -0,634
H	$\dot{x} = -y + z^2, \dot{y} = x + y/2, \dot{z} = x - z$	0,117, 0, -0,617
I	$\dot{x} = -y/5, \dot{y} = x + z, \dot{z} = x + y^2 - z$	0,012, 0, -1,012
J	$\dot{x} = 2z, \dot{y} = -2y + z, \dot{z} = -x + y + y^2$	0,076, 0, -2,076
K	$\dot{x} = xy - z, \dot{y} = x - y, \dot{z} = x + 0,3z$	0,038, 0, -0,890
L	$\dot{x} = y + 3,9z, \dot{y} = 0,9x^2 - y, \dot{z} = 1 - x$	0,061, 0, -1,061
M	$\dot{x} = -z, \dot{y} = -x^2 - y, \dot{z} = 1,7(1 + x) + y^2$	0,044, 0, -1,044
N	$\dot{x} = -2y, \dot{y} = x + z^2, \dot{z} = 1 + y - 2x$	0,076, 0, -2,076
O	$\dot{x} = y, \dot{y} = x - z, \dot{z} = x + xz + 2,7y$	0,049, 0, -0,319
P	$\dot{x} = 2,7y + z, \dot{y} = -x + y^2, \dot{z} = x + y$	0,087, 0, -0,481
Q	$\dot{x} = -z, \dot{y} = x - y, \dot{z} = 3,1 + y^2 + 0,5z$	0,109, 0, -0,609
R	$\dot{x} = 0,9 - y, \dot{y} = 0,4 + z, \dot{z} = xy - z$	0,062, 0, -1,062
S	$\dot{x} = -x - 4y, \dot{y} = x + z^2, \dot{z} = 1 + x$	0,188, 0, -1,188

тельно проработана Джулиеном Спроттом, американским исследователем из университета штата Висконсин. С помощью компьютера он произвел прямой перебор большого числа систем трех

дифференциальных уравнений первого порядка, правые части которых представлялись полиномами второй степени (Sprott, 1994). Найденные Спроттом системы с хаотической динамикой представлены в таблице на с. 78, где приведены также значения показателей Ляпунова для этих систем. Одна из моделей А обладает свойством сохранения фазового объема и демонстрирует хаотическую динамику, характерную для консервативных систем. Остальные модели диссипативные, и хаос ассоциируется с наличием странного аттрактора. Для систем В и С аттрактор подобен по виду аттрактору Лоренца, для остальных систем (D–S) — аттрактору Ресслера. Заведомо эквивалентные системы, получаемые перестановками переменных x, y, z , в таблицу не включены. Спротт отмечает, что некоторые из найденных систем могут все же оказаться эквивалентными, т. е. сводиться одна к другой нетривиальной заменой переменных. Пока неизвестно, однако, как установить наличие такой эквивалентности в общем случае, и вопрос остается открытым.

5.3. Нелинейные осцилляторы под периодическим внешним воздействием

Нелинейный диссипативный осциллятор — это динамическая система, мгновенное состояние которой задается двумя величинами, обобщенной координатой x и скоростью \dot{x} . Конкретные физические реализации встречаются в механике (маятник, шарик на пружине, частица в потенциальной яме), акустике (колебания пузырьков в жидкости), электронике (колебательный контур или резонатор, содержащий нелинейные элементы). При наличии внешнего периодического воздействия в уравнениях появляются члены, содержащие явную зависимость от времени, и нелинейный осциллятор превращается в неавтономную систему, которая может демонстрировать сложную динамику и переход к хаосу. Фазовое пространство такой системы трехмерно, поскольку задание переменной x и скорости \dot{x} однозначно определяет последующее движение лишь в том случае, если указано, к какому моменту времени или к какой фазе воздействия они относятся.

Если предположить, что нелинейная зависимость возвращающей силы для осциллятора имеет вид $f(x)$, а сила трения пропорциональна \dot{x} , то приходим к уравнению

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + f(x) = a \sin \omega t, \quad (5.13)$$

где γ — параметр диссипации, a и ω задают частоту и амплитуду воздействия.

Другой вариант — параметрическое возбуждение, когда мы имеем периодическую зависимость коэффициента в уравнении от

времени:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + (1 + a \sin \omega t) f(x) = 0. \quad (5.14)$$

Примерами могут служить маятник с периодически меняющейся длиной нити и нелинейный *LCR*-контур, в котором периодическим образом изменяют во времени емкость или индуктивность.

Как при силовом, так и при параметрическом возбуждении нелинейного диссипативного осциллятора, на плоскости параметров обычно представлены области различных по характеру периодических и хаотических режимов, бифуркации удвоения периода, складки, сборки и «перекрестки».

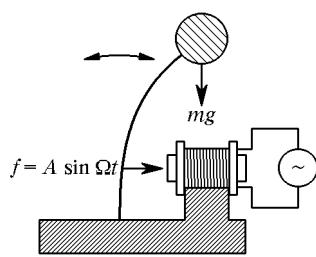


Рис. 5.14. Механическая система, описываемая уравнением Дуффинга с внешним периодическим воздействием

отклонения возвращающая сила упругости в точности компенсирует отклоняющий момент силы тяжести. Осциллятор Уеды может быть реализован также в виде электрической схемы — колебательного контура с нелинейной индуктивностью. Заменой $\tau = \gamma t$, $X = \gamma x$ уравнение (5.13) сводится в этом случае к следующему виду:

$$\ddot{x} + \dot{x} + x^3 = A \sin \Omega \tau. \quad (5.15)$$

Здесь присутствует только два параметра, $A = a\gamma^{-3}$, $\Omega = \omega/\gamma$, характеризующие, соответственно, амплитуду и частоту воздействия. При малой амплитуде A частота колебаний совпадает с частотой внешнего воздействия, а при увеличении этого параметра можно наблюдать более сложное динамическое поведение, включая переход к хаосу.

Поскольку функция $f(x)$ нечетная, система (5.16) обладает симметрией и инвариантна относительно одновременной замены $x \rightarrow -x$, $\tau \rightarrow \tau + \pi/\Omega$. Поэтому всегда реализуется одна из двух возможностей:

- (1) аттрактор обладает симметрией относительно указанной замены;
- (2) аттрактор не обладает симметрией, но имеет симметричного партнера, т. е. в зависимости от начальных условий в системе будут возникать два разных установившихся режима, переходящие один в другой при преобразовании симметрии.

На рис. 5.15 показана карта динамических режимов осциллятора Уеды на плоскости параметров (A, Ω) . По периферии рисунка приводятся фазовые портреты аттрактора в проекции на плоскость переменных (x, \dot{x}) , дающие представление об эволюции

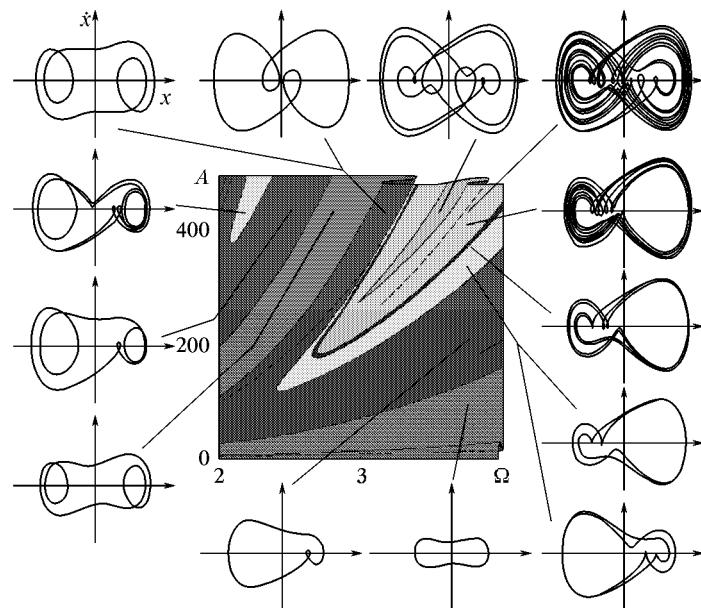


Рис. 5.15. Карта динамических режимов на плоскости параметров (A, Ω) для осциллятора Уеды (5.16). По периферии рисунка показан вид фазового портрета аттрактора в проекции на плоскость (x, \dot{x}) . Два фазовых портрета в правом нижнем углу рисунка отвечают двум взаимно симметричным аттракторам, существующим в одной и той же точке плоскости параметров

аттрактора в зависимости от параметров. При малых амплитудах единственным аттрактором является замкнутая кривая — симметричный цикл, причем период колебаний равен периоду внешнего воздействия. При увеличении амплитуды можно наблюдать бифуркацию потери симметрии. Она состоит в том, что симметричный цикл становится неустойчивым и возникает два цикла-аттрактора. Далее, на базе каждого из асимметричных циклов наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаосу. Пока амплитуда не очень велика, существуют два асимметричных хаотических аттрактора. При большой амплитуде воздействия они сливаются в один симметричный хаотический аттрактор.

Начиная с работы Линссея, популярным примером системы с хаотическим поведением является электронная реализация нeli-

нейного осциллятора под внешним периодическим воздействием (Lindsay, 1981; Астахов и др., 1988). Это колебательный контур, LRC -цепь, в которую включен полупроводниковый диод (рис. 5.16).

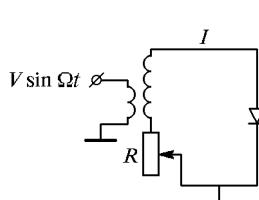


Рис. 5.16. Схема электронного нелинейного осциллятора

Если бы мы захотели описать динамику нелинейного контура с помощью дифференциального уравнения, то оно оказалось бы сложнее, чем (5.13), поскольку полупроводниковый диод сочетает свойства нелинейной емкости и нелинейной проводимости. Здесь, однако, мы хотим подчеркнуть только экспериментальный аспект. На рис. 5.17 приводится полученная в эксперименте (Б. П. Безручко и Е. П. Селезнев) карта динамических режимов на плоскости параметров «частота Ω -амплитуда V » внешнего периодического воздействия. На ней можно видеть линии бифуркаций удвоения периода, накапливающиеся к границе хаоса. Цифрами отмечены

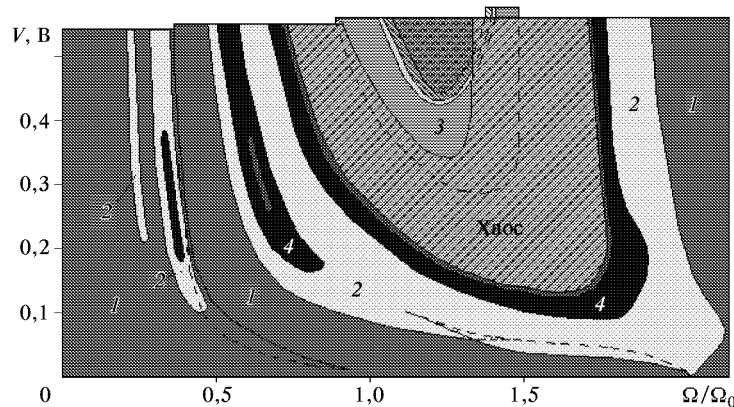


Рис. 5.17. Полученная в эксперименте карта динамических режимов на плоскости частота–амплитуда воздействия для электронного нелинейного осциллятора

периоды наблюдаемых колебаний в единицах периода внешнего воздействия.

На рис. 5.18 показано, как эволюционирует вид фазовых портретов аттрактора на плоскости «напряжение U –ток I », а также спектры колебаний в процессе перехода к хаосу через удвоения периода.

Стоит отметить большое преимущество радиотехнических и электронных устройств как объектов экспериментального исследования сложной динамики. В сравнении с механическими, гидродинамическими и другими системами они просты в реализации,

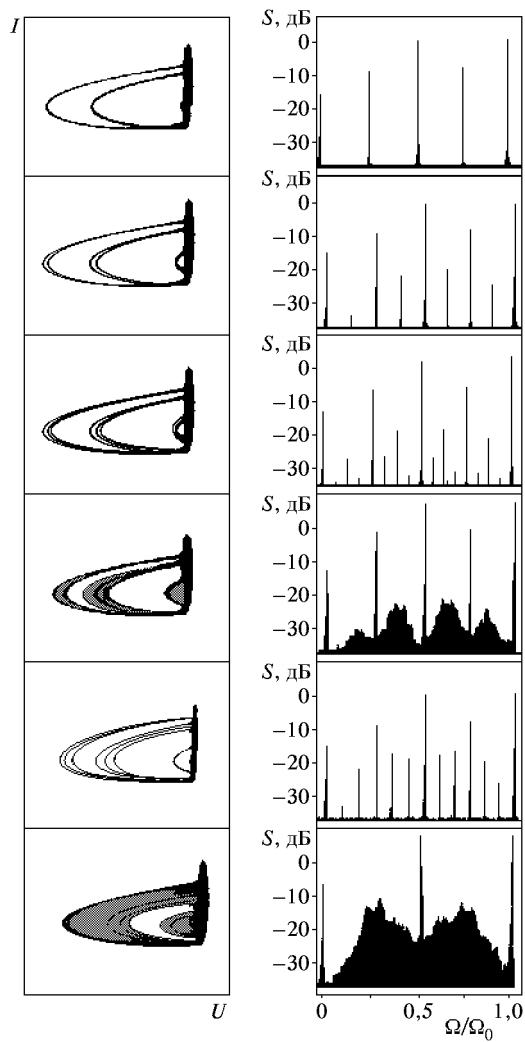


Рис. 5.18. Полученные в эксперименте фазовые портреты электронного осциллятора с периодическим внешним воздействием (слева) и спектры колебаний в контуре (справа)

допускают простое и удобное управление параметрами, использование распространенной стандартной аппаратуры для наблюдения и обработки генерируемых сигналов.

5.4. Автономные системы — электронные генераторы

Генератор Кияшко–Пиковского–Рабиновича. По-видимому, исторически первым примером простой электронной схемы, в которой целенаправленно был реализован режим хаотических автоколебаний, был генератор, предложенный сотрудниками Института прикладной физики Академии наук в Нижнем Новгороде С.В.Кияшко, А.С.Пиковским и М.И.Рабиновичем (Пиковский, Рабинович, 1978; Кияшко, Пиковский, Рабинович, 1979).

Это несложная модификация традиционной электронной системы, использующейся для генерации автоколебаний, в которой в колебательный контур включен дополнительный нелинейный элемент — туннельный диод (рис. 5.19 a). Туннельный диод представляет собой двухполюсник, для которого зависимость тока от напряжения — вольт-амперная характеристика имеет N -образный вид и содержит падающий участок (рис. 5.19 b). Пока ток I и напряжение V малы, туннельный диод не оказывает существенного влияния на колебания в контуре. При этом задействован участок (I) на характеристике туннельного диода, а из-за присутствия электронной лампы и цепи обратной связи амплитуда нарастает

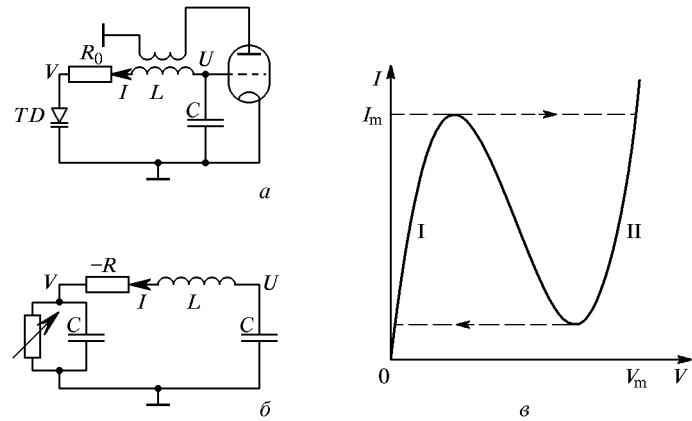


Рис. 5.19. Радиотехнический авогенератор хаотических колебаний Кияшко–Пиковского–Рабиновича (a), его эквивалентная схема (b) и вольт-амперная характеристика туннельного диода (c)

во времени. Когда ток I достигает значения I_m , происходит почти мгновенное переключение туннельного диода на участок (II); быстрота переключения связана с малостью собственной емкости диода c . Далее колебания быстро затухают, ток через туннельный диод уменьшается и в некоторый момент происходит его обратное переключение на участок (I). В результате двух переключений туннельный диод в значительной мере поглощает поступившую в

LCR-контур энергию, и колебания снова начинают нарастать с малой амплитуды. При определенных условиях наблюдаемая последовательность цугов нарастающих колебаний оказывается хаотической. Принципиальная возможность возникновения хаоса обусловлена тем, что в области малых амплитуд динамика является неустойчивой по отношению к возмущению начальных условий.

На рис. 5.19б приведена эквивалентная схема генератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича, на основании которой можно выписать уравнения динамики. Из приведенного описания механизма функционирования системы следует, что нелинейность характеристики электронной лампы не имеет принципиального значения.

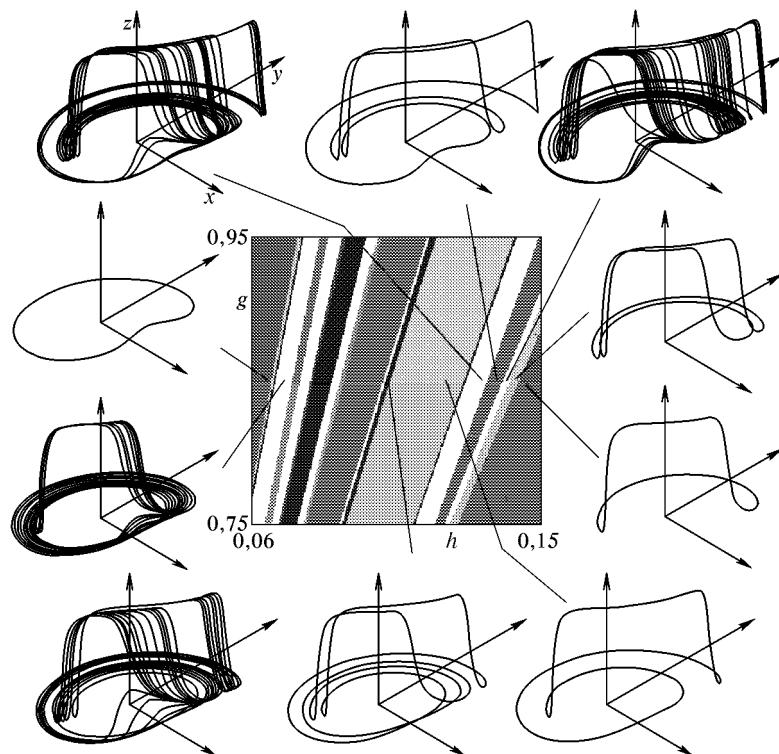


Рис. 5.20. Карта динамических режимов и фазовые портреты атракторов для автогенератора Кияшко–Пиковского–Рабиновича на плоскости параметров (h, g) при $\epsilon = 0,2$ и нелинейной характеристике туннельного диода (5.19). Области хаоса показаны белым

Присутствие электронной лампы учитывается включением в эквивалентную схему отрицательного сопротивления $(-R)$, благодаря чему малые колебания в контуре оказываются нарастающими.

Туннельный диод представляется в виде параллельно соединенных малой емкости c и нелинейного резистора с характеристикой $I = I_m f(V/V_m)$. Записывая уравнения Кирхгофа, имеем:

$$L \frac{dI}{dt} = U - V + RI, \quad C \frac{dU}{dt} = -I, \quad c \frac{dV}{dt} + I_m f\left(\frac{V}{V_m}\right) = I. \quad (5.16)$$

Введем следующие безразмерные переменные:

$$x = \frac{I}{I_m}, \quad y = UI_m \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad y = \frac{V}{V_m}, \quad \tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad (5.17)$$

тогда уравнения принимают вид

$$\dot{x} = 2hx + y - gz, \quad \dot{y} = -x, \quad \varepsilon \dot{z} = x - f(z), \quad (5.18)$$

$$\text{где } 2h = R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad g = \frac{V_m}{I_m} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \varepsilon = \frac{gc}{C} \ll 1^1).$$

На рис. 5.20 показана карта динамических режимов и портреты аттракторов, которые реализуются в системе (5.18) при $\varepsilon = 0,2$ для нелинейной характеристики, заданной кубической параболой

$$f(z) = 8,592z - 22z^2 + 14,408z^3. \quad (5.19)$$

Генератор с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова.

Другую модификацию традиционной электронной автоколебательной системы представляет собой генератор с инерционной нелинейностью, предложенный и исследованный в Саратовском университете в группе В. С. Анищенко (Анищенко, Астахов и др., 1983). В схему, содержащую LRC -контура, усилитель и цепь обратной связи, добавляется дополнительный инерционный блок, на вход которого поступает через квадратичный детектор тот же сигнал x ,

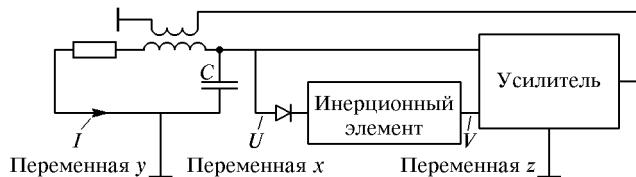


Рис. 5.21. Схема генератора с инерционной нелинейностью Анищенко–Астахова

что и на вход основного усилителя (рис. 5.21). С выхода инерционного элемента сигнал z подается на дополнительный вход

¹⁾ То обстоятельство, что третье уравнение содержит малый параметр при производной, можно использовать для аналитического исследования динамики, что и было сделано в работе Кияшко, Пиковского и Рабиновича.

основного усилителя и управляет величиной его коэффициента передачи. В простейшем случае, когда собственной нелинейностью усилителя можно пренебречь, динамика описывается системой уравнений

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = -gz + 1(x)x^2, \quad (5.20)$$

где $1(x)$ обозначает ступенчатую функцию Хэвисайда, $1(x) = 0$ при $x \leq 0$ и 1 при $x > 0$. Параметр g считается положительным и характеризует время релаксации инерционного элемента, параметр m определяет коэффициент передачи усилителя.

Система (5.20) имеет неподвижную точку в начале координат, которая является устойчивой при $-2 < m < 0$ и теряет устойчивость при $m > 0$. Момент $m = 0$ отвечает бифуркации Андронова—Хопфа — рождению предельного цикла. При дальнейшем изменении параметров этот цикл в свою очередь может претерпевать различные бифуркации. На рис. 5.22 показана карта динамических

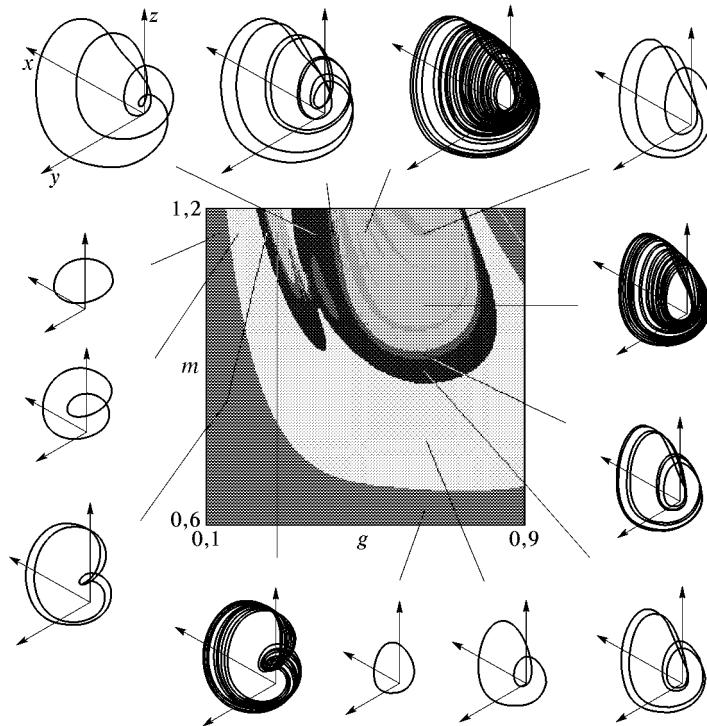


Рис. 5.22. Карта динамических режимов для системы уравнений (5.20), описывающей генератор с инерционной нелинейностью Анищенко—Астахова, и фазовые портреты аттрактора в некоторых характерных точках

режимов системы, полученная на компьютере. По периферии приведены фазовые портреты аттракторов, отвечающих некоторым представительным точкам пространства параметров. В частности, фиксируя g и увеличивая t , можно наблюдать последовательность удвоений периода с переходом к хаосу (портреты в правой нижней части рисунка). В области хаоса имеются окна периодических режимов характерной формы. На карте можно также усмотреть структуру типа «перекрестка», которая содержит точку сборки и линии складок.

Генератор с инерционной нелинейностью был реализован и детально изучен в эксперименте. Было убедительно продемонстрировано, что экспериментальная система адекватно описывается моделью (5.20). Подробности можно найти в оригинальных работах и монографиях В.С. Анищенко с сотрудниками.

Кольцевой генератор Дмитриева–Кислова. В конце 60-х–начале 70-х годов в Институте радиотехники и электроники АН СССР под руководством В. Я. Кислова проводились исследования, направленные на создание эффективных генераторов шума. Предложенная схема состояла из двух ламп бегущей волны (ЛБВ). Одна ЛБВ, более мощная, функционировала как усилитель, вторая использовалась как нелинейный элемент, обеспечивающий запаздывающую обратную связь путем подачи преобразованного сигнала с выхода усилителя на его вход (Кислов, Залогин, Мясин, 1979). Хотя в то время представления о хаосе еще не получили развития и не пользовались широкой известностью, исследователи целенаправленно получили хаотические автоколебания и правильно интерпретировали их как динамический режим в системе с запаздывающей обратной связью. Позднее, задавшись целью реализовать простейшую модель-аналог, А.С. Дмитриев и В. Я. Кислов предложили систему в виде замкнутой в кольцо цепочки из нелинейного усилителя, RLC -фильтра и инерционного элемента (рис. 5.23). В пред-

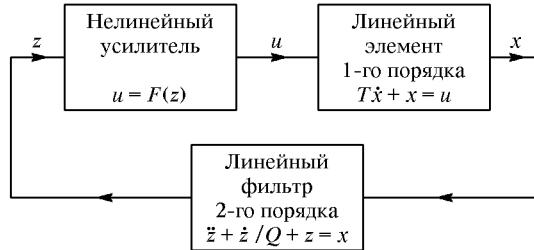


Рис. 5.23. Схема кольцевого генератора Дмитриева–Кислова

положении, что нелинейная характеристика усилителя имеет вид $F(z) = Mz \exp(-z^2)$, можно получить следующую систему урав-

нений:

$$T\dot{x} + x = Mz \exp(-z^2), \quad \dot{y} = x - z, \quad \dot{z} = y - \frac{z}{Q}. \quad (5.21)$$

Здесь x характеризует сигнал на выходе инерционного элемента, а z — на входе усилителя. Параметры T и Q определяют, соответственно, время релаксации инерционного элемента и добротность RLC -фильтра, а параметр M задает коэффициент усиления. Величину Q будем считать фиксированной и равной 10.

Вследствие того, что характеристика усилителя выбрана симметричной, система остается инвариантной относительно замены $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$. Поэтому аттрактор может либо удовлетворять условию симметрии и переходить в себя при указанной замене, либо, будучи несимметричным, иметь симметрично расположенного партнера.

При переходе параметра M через бифуркационное значение $M_0 = 1$ в системе происходит бифуркация — потеря устойчивости тривиального состояния равновесия в начале координат. В результате рождается пара симметрично расположенных устойчивых состояний равновесия $x = Qy = z = \pm\sqrt{\ln M}$, которые с ростом M

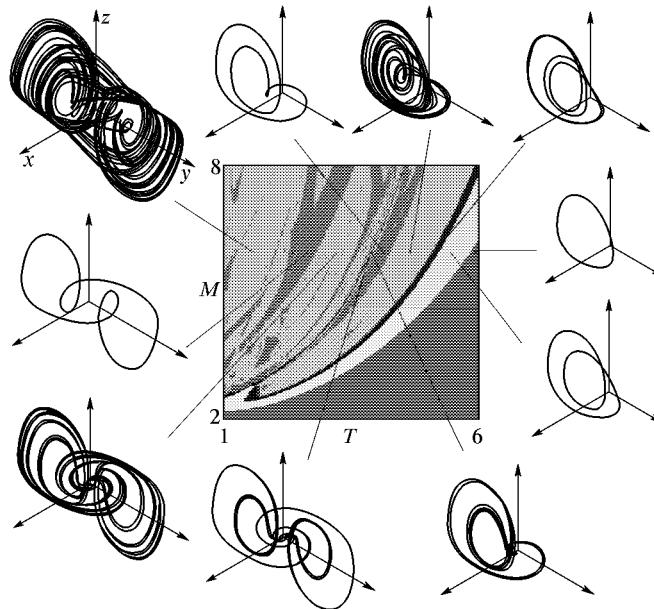


Рис. 5.24. Карта динамических режимов системы Дмитриева–Кислова (5.21) на плоскости параметров (T, M) при $Q = 10$ и фазовые портреты аттракторов в нескольких точках

удаляются от начала координат. При

$$M_1 = \exp\left(\frac{(T+Q)(1+TQ)}{2TQ^2}\right)$$

оба эти положения равновесия теряют устойчивость и становятся неустойчивыми фокусами. В окрестности каждого равновесия рождается предельный цикл. Эти два цикла являются друг для друга симметричными партнерами, так что можно следить за одним из них. При дальнейшем увеличении параметра M происходит каскад бифуркаций удвоения периода и переход к хаосу, причем аттрактор похож на аттрактор Ресслера. Затем, при достаточно больших M , происходит объединение аттрактора с симметричным партнером и образование единого симметричного аттрактора. О характерных режимах и бифуркациях в системе можно судить по карте динамических режимов и фазовым портретам, представленным на рис. 5.24.

Кроме системы (5.21) Дмитриев и Кислов рассмотрели целый ряд различных вариантов кольцевых генераторов, в том числе и с высокой размерностью фазового пространства. Для подробного ознакомления с результатами соответствующих теоретических и экспериментальных исследований можно рекомендовать монографию этих авторов (Дмитриев, Кислов, 1989).

Схема Чуа. В 1983 г. американский физик и специалист по электронике профессор Леон Чуа (университет Беркли, штат Калифорния) посетил лабораторию японского профессора Т. Мацумото. Исследователи пытались реализовать электронный аналог системы Лоренца. Установка выглядела весьма внушительно, но, к сожалению, не работала из-за определенных недостатков имеющихся электронных компонент. Задавшись целью реализовать все же простую электронную систему, демонстрирующую режим, подобный хаосу Лоренца, профессор Чуа предложил схему, показанную на рис. 5.25, которая содержала единственный нелинейный элемент с кусочно-линейной характеристикой (Chua, Komuro, Matsumoto, 1986). В дальнейшем эта система была подвергнута

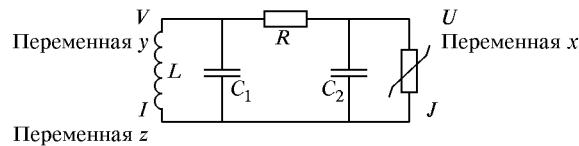


Рис. 5.25. Схема Чуа, содержащая индуктивность L , две емкости C_1 и C_2 , резистор R и элемент с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой $J(U)$. Безразмерные переменные, фигурирующие в уравнениях, x , y , z , пропорциональны, соответственно, напряжению на нелинейном элементе, напряжению на индуктивности и току через индуктивность

всестороннему теоретическому и экспериментальному исследованию и является на сегодняшний день одной из наиболее хорошо исследованных моделей нелинейной динамики.

Записывая уравнения Кирхгофа для схемы Чуа и переходя к безразмерным переменным, можно получить следующую систему уравнений:

$$\dot{x} = \alpha(y - h(x)), \quad \dot{y} = x + y - z, \quad \dot{z} = -\beta y, \quad (5.22)$$

где α и β — параметры, а функция $h(x)$ определяется характеристикой нелинейного элемента и традиционно задается в виде

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{7}, & x \leq -1, \\ -\frac{x}{7}, & -1 < x < 1, \\ \frac{2x-3}{7}, & x \geq 1. \end{cases} \quad (5.23)$$

В зависимости от параметров, схема Чуа может демонстрировать различные регулярные и хаотические режимы. Следует иметь в виду, что из-за кусочно-линейной характеристики бифуркация рождения предельного цикла оказывается нетипичной (потеря устойчивости неподвижной точки сразу приводит к возникновению автоколебаний конечной амплитуды). В остальном бифуркации и переход к хаосу оказываются такими же, как во многих других нелинейных системах. В то же время из-за того, что в трех областях фазового пространства $x < -1$, $-1 < x < 1$ и $x > 1$ уравнения линейны, динамика допускает далеко идущий теоретический анализ.

Благодаря симметрии, присущей выбранной нелинейной характеристике, странный аттрактор системы Чуа может быть симметричным, подобно аттрактору Лоренца (рис. 5.26a). В определенной области параметров наблюдается ленточный аттрактор, по-добный аттрактору Ресслера (рис. 5.26б), но он имеет, как можно проверить, симметричного партнера (рис. 5.26в).

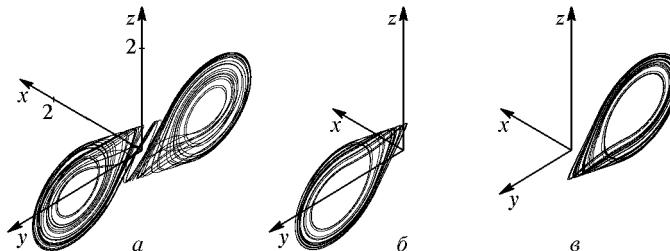


Рис. 5.26. Симметричный аттрактор в системе Чуа при $\alpha = 6,8$, $\beta = 10$ (a), аттрактор типа Ресслера при $\alpha = 6,6$, $\beta = 10$ (б) и его симметричный партнер (в)

ленной области параметров наблюдается ленточный аттрактор, по-добный аттрактору Ресслера (рис. 5.26б), но он имеет, как можно проверить, симметричного партнера (рис. 5.26в).

На рис. 5.27 показана карта динамических режимов в области параметров, где реализуется атTRACTор типа Ресслера (Kuznetsov et al., 1993, 1996). Для того чтобы на карте были хорошо видны

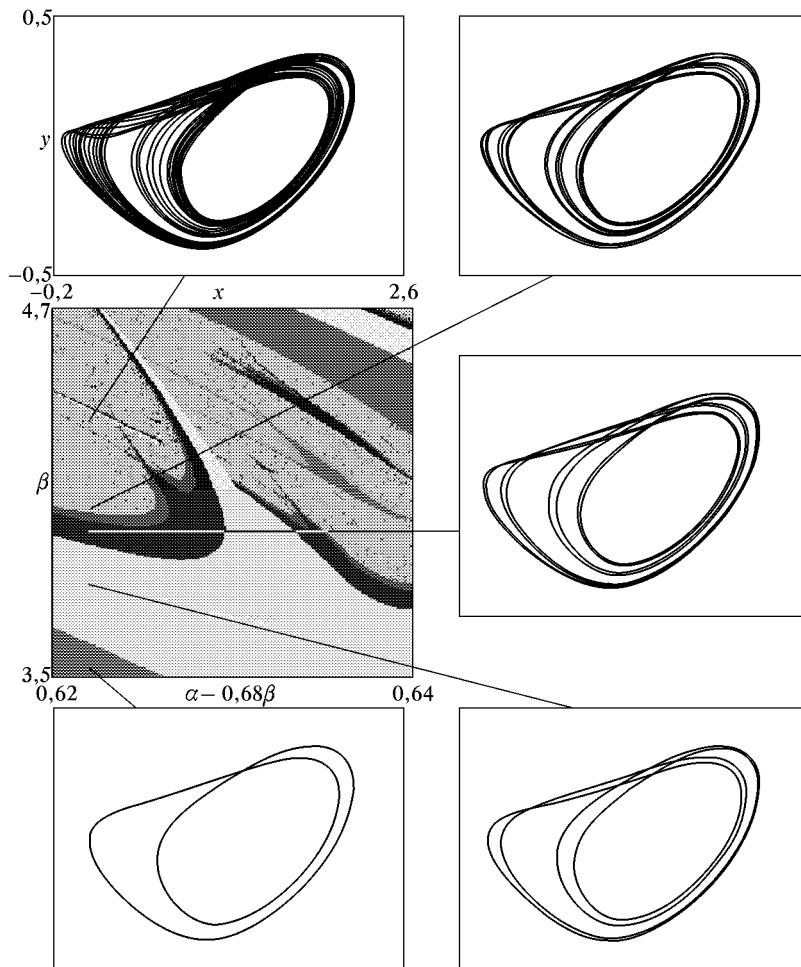


Рис. 5.27. Карты динамических режимов системы Чуа в области параметров, где реализуется атTRACTор типа Ресслера, и фазовые портреты в характерных режимах

характерные структурные элементы, использованы «косые» координаты (α', β) , где $\alpha' = \alpha - 0,68\beta$. Отметим наличие областей существования периодических режимов различного периода, хаоса, «перекрестков» с характерной структурой, включающей точку сборки и линии складок.